Grado en Física

Ejercicios de Análisis Matemático I

Aplicaciones de las derivadas

Ceros de una función - Soluciones de ecuaciones.

Los puntos en los que se anula una función se llaman *ceros* de dicha función. Para estudiar cuántas soluciones tiene una ecuación de la forma $f(x) = g(x)$ donde f y g son funciones definidas y con derivadas de todos órdenes en un intervalo I (que a veces deberás elegir tú mismo), lo que se hace es estudiar cuántos ceros tiene la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

Fundamentos teóricos. El teorema de los ceros de Bolzano, junto con el teorema de Rolle, permiten determinar en muchas ocasiones el número de ceros reales de una función.

El teorema de Bolzano nos dice que entre cada dos puntos en los que se produce un cambio de signo de una función continua en un intervalo hay ***por lo menos*** un cero de dicha función.

El teorema de Rolle nos dice que entre cada dos ceros de una función derivable en un intervalo hay ***por lo menos*** un cero de la derivada de dicha función.

Del teorema de Rolle deducimos que si una función se anula en n puntos, su derivada se anula en ***por lo menos*** $n-1$ puntos; su derivada segunda se anula en ***por lo menos*** $n-2$ puntos y, en general, su derivada de orden k, donde $k = 1, 2, ..., n-1$, se anula en ***por lo menos*** $n-k$ puntos.

Del teorema de Rolle deducimos también que si la derivada de una función se anula en exactamente k puntos, donde $k = 0, 1, 2, ...$, la función tiene ***como máximo*** $k+1$ ceros. Este resultado podemos aplicarlo *hacia atrás*, es decir, si sabemos, por ejemplo, que la derivada tercera se anula solamente en un punto, deducimos que la derivada segunda puede anularse ***como máximo*** en dos puntos, que la derivada primera puede anularse ***como máximo*** en tres puntos y que la función puede anularse ***como máximo*** en cuatro puntos. En general, si la derivada de orden n de una función se anula exactamente en k puntos la función se anula ***como máximo*** en $n+k$ puntos.

Ceros de las funciones polinómicas. Se dice que **una función polinómica $P(x)$ tiene un cero de orden** $k \geqslant 1$ en un punto a, si el valor de P y el de sus derivadas hasta la de orden $k-1$ en a es cero, y la derivada de orden k de P no se anula en a. Los ceros de orden 1 se llaman **ceros simples**. El Teorema Fundamental del Álgebra dice que una función polinómica de grado n (en general, con coeficientes complejos) tiene n raíces reales o complejas *contando cada raíz tantas veces como indica su orden*. Recuerda también que las raíces complejas de un polinomio con coeficientes reales vienen por pares de raíces complejas conjugadas. Teniendo en cuenta que agrupando cada raíz compleja con su conjugada aparecen factores del tipo $x^2 + bx + c$, se deduce que:

a) Una función polinómica de grado impar tiene *contando cada raíz tantas veces como indica su orden* un número impar de raíces reales y sabemos que por lo menos tiene una.

b) Una función polinómica de grado par tiene *contando cada raíz tantas veces como indica su orden* un número par de raíces reales y puede ocurrir que no tenga ninguna.

1. a) Prueba, usando el teorema de Bolzano, que la función $f(x) = \mathrm{e}^x + x^3 - 6x - 2$ se anula en al menos tres puntos del intervalo $[-3, 3]$.

   b) Prueba, usando el teorema de Rolle, que dicha función no puede anularse en más de tres puntos.

2. a) Prueba, usando el teorema de Bolzano, que la función $f(x) = \cos x - 2\operatorname{sen} x + \dfrac{x^3}{2}$ se anula en al menos tres puntos.

   b) Prueba, usando el teorema de Rolle, que dicha función no puede anularse en más de tres puntos.

3. Justifica que la ecuación
$$3^x - x^3 - \frac{6}{5} = 0$$
tiene exactamente cuatro soluciones reales.

4. Prueba que la ecuación
$$x\cos(x) - 2\operatorname{sen}(x) + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{4} = 0$$
tiene exactamente tres soluciones reales.

5. Estudia el número de soluciones reales de la ecuación $3x^5 + 5x^3 - 30x = \alpha$ según los valores de α.

6. Estudia, según los valores de α, el número de ceros, contando multiplicidades cuando proceda, de la función polinómica $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x - \alpha$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - 4x - 6\ln(x)$ para todo $x > 0$.

   a) Prueba que f alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}^+$ y determina el conjunto imagen $f(\mathbb{R}^+)$ de dicha función.

   b) Determina el número de soluciones de la ecuación $f(x)=0$ en $\mathbb{R}^+$ y localiza dichas soluciones en intervalos disjuntos.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por
$$f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 10}{x^2 + 1} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

   a) Calcula los extremos relativos de f y comprueba que son extremos absolutos. Calcula la imagen de f y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   b) Usando los resultados anteriores, estudia el número de soluciones de la ecuación $f(x) = m$ según el valor del número real m.

Desigualdades y polinomios de Taylor

El teorema del valor medio permite acotar el incremento de una función por el incremento de la variable y una cota de la derivada. Esto da lugar a muchas desigualdades interesantes.

Ejercicios en los que se pide probar una desigualdad del tipo $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \geqslant a$, donde f y g son funciones derivables. Se hace lo siguiente:

- Se define $h(x) = g(x) - f(x)$ y se comprueba que $h(a) = 0$.
- Se comprueba que $h'(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$.

Esta última desigualdad implica que h es creciente en $[a, +\infty[$ y, como $h(a) = 0$, concluimos que $h(x) \geqslant 0$, es decir, $g(x) - f(x) \geqslant 0$, para todo $x \geqslant a$.

Naturalmente, los detalles pueden cambiar. Puede que el punto a debas elegirlo tú. Es una estrategia que tiene éxito cuando la desigualdad $h'(x) \geqslant 0$ es más fácil que la inicial. Puede ocurrir que esta desigualdad siga siendo complicada; entonces podemos aplicarle a ella el mismo procedimiento, comprobamos que $h'(a) = 0$ y que $h''(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$, lo que implica que h' es creciente en $[a, +\infty[$ y, como $h'(a) = 0$, concluimos que $h'(x) \geqslant 0$ para todo $x > a$.

También debes tener en cuenta que probar una desigualdad del tipo $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in I$ donde I es un intervalo, y hay un punto $a \in I$ tal que $f(a) = g(a)$, es lo mismo que probar que en el intervalo I la función $h(x) = g(x) - f(x)$ alcanza un mínimo absoluto en el punto a.

Los teoremas de Taylor–Young y de Taylor se usan para obtener aproximaciones polinomiales de una función dada y para calcular valores aproximados con precisión prefijada.

9. Sean $0 < x < y$. Prueba que:
   a) $\dfrac{y-x}{1+y^2} < \operatorname{arc\,tg} y - \operatorname{arc\,tg} x < \dfrac{y-x}{1+x^2}$.

   b) $\dfrac{y-x}{y} < \log y - \log x < \dfrac{y-x}{x}$.

10. Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ y $0 < a < b$. Prueba que
$$na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$$

11. Prueba que para todo $x > -1$ se verifica que
$$\frac{x}{x+1} \leqslant \log(1+x)$$
¿Cuándo se da la igualdad en la desigualdad anterior?

12. Prueba que para todo $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ se verifica que:
$$\log(\cos x) \leqslant -\frac{x^2}{2}.$$
¿Cuándo se da la igualdad?

13. Prueba que para todo $x \in]0, \pi/2[$ se verifica que:
$$i)\ 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x\,; \quad ii)\ \frac{2x}{\pi} < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

14. Sean $0 < a < b$. Prueba que si $b \leqslant \mathrm{e}$ entonces $a^b < b^a$, y si $\mathrm{e} \leqslant a$ entonces $b^a < a^b$. ¿Qué puede decirse si $a < \mathrm{e} < b$?.

15. Supuesto que $a > 0$, demuestra que $-a\,\mathrm{e}\log x \leqslant x^{-a}$ para todo $x > 0$.

16. Dado $\alpha \in]0,1[$, prueba que $x^\alpha < \alpha x + 1 - \alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.
    Deduce que, dados $p > 0$ y $q > 0$ tales que $1/p + 1/q = 1$, entonces para todos $a > 0$ y $b > 0$ se verifica que $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$. ¿Cuándo se da la igualdad?

17. ¿Hay algún número $a > 0$ que verifique que $a^{x/a} \geqslant x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$? ¿Cuál es dicho número?

18. Calcula una función polinómica φ tal que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \varphi(x)}{x^5} = 0$.

19. Calcula, usando un desarrollo de Taylor conveniente, un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-3} en cada uno de los casos siguientes:
$$a)\ \alpha = \sqrt[3]{7} \quad b)\ \alpha = \sqrt{\mathrm{e}} \quad c)\ \alpha = \operatorname{sen}\frac{1}{2} \quad d)\ \alpha = \operatorname{sen}(61^\circ)$$

Ejercicios de optimización

Una de las aplicaciones más útiles de las derivadas es a los problemas de optimización. En dichos problemas se trata, por lo general, de calcular el máximo o el mínimo absolutos de una magnitud. Hay una gran variedad de problemas que responden a este esquema y con frecuencia tienen contenido geométrico o económico o físico. Por ello cada uno de estos ejercicios requiere un estudio particular. Los siguientes consejos pueden ser útiles:

- Entiende bien el problema. Haz, si es posible, un dibujo o un esquema.
- Elige las variables y la magnitud, Q, que tienes que optimizar.

• Estudia las relaciones entre las variables para expresar la magnitud Q como función de una sola de ellas, $Q = f(x)$.
• Las condiciones del problema deben permitir establecer el dominio de f.
• Estudia la variación del signo de la derivada de f en su dominio para calcular máximos y mínimos absolutos.

20. Con una lámina metálica rectangular de 12×18 centímetros se quiere construir una caja sin tapa cortando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse.

21. Calcula las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuyo costo de producción sea mínimo. Se supone que no se desperdicia aluminio al cortar los lados de la lata, pero las tapas de radio r se cortan de cuadrados de lado $2r$ por lo que se produce una pérdida de metal.

22. En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta, y a 500 metros río arriba, se está construyendo una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta a 9 euros cada metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta a 15 euros cada metro, ¿cuál es la longitud del tendido más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?.

23. Calcula la longitud de la escalera más larga que, llevada en posición horizontal, puede pasar por la esquina en ángulo recto que forman dos pasillos de anchuras respectivas a y b.

24. Determina el rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, inscrito en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, y que tenga área máxima.

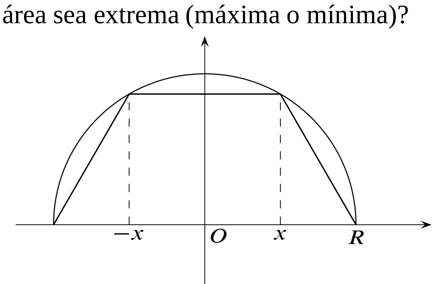
25. En una lámina circular de radio R se recorta un sector circular de ángulo ϑ y con él se construye un cono. Calcula el valor de ϑ para que el volumen del cono así construido sea máximo.

26. Se considera la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Calcula el triángulo isósceles de área máxima inscrito en dicha elipse, que tiene un vértice en el punto $(0, b)$ y base paralela al eje de abscisas.

27. Se desea construir un silo, con un volumen V determinado, que tenga la forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción (por unidad de superficie) es doble para la semiesfera que para el cilindro (la base es gratis). Calcula las dimensiones óptimas para minimizar el costo de construcción.

28. Un rectángulo tiene su base sobre el eje OX, su esquina inferior izquierda es $(0, 0)$ y su esquina superior derecha está en la gráfica de la función $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \frac{1}{x-1} \qquad (x > 1).$$
a) Calcula las dimensiones del rectángulo de mínimo perímetro que se puede conseguir de esta forma.
b) ¿Hay un rectángulo, del tipo descrito arriba, cuya área sea extrema (máxima o mínima)?

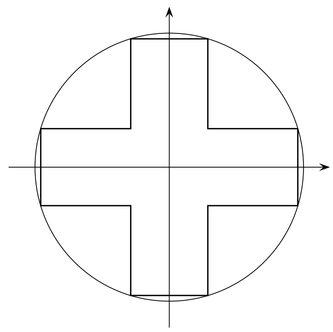
29. Calcula las dimensiones del trapecio isósceles de área maxima inscrito en la semicircunferencia superior centrada en el origen de radio R.



30. De entre todos los rectángulos cuya diagonal tiene longitud $d > 0$ calcular el de área máxima y el de mínimo perímetro..

31. Dados los puntos $A = (0, 3)$ y $B = (2, 2)$, calcula cuál es el camino más corto para ir de A a B pasando por un punto del eje de abscisas.

32. Calcula el área maxima de una cruz cuyos lados tienen la misma anchura inscrita en una circunferencia de radio R.



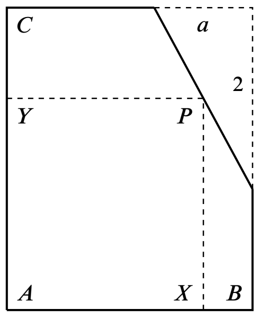
33. Calcula un punto (u, v) de la parábola $y = 3 - x^2$ de forma que el triángulo determinado por la tangente a la parábola en dicho punto y los ejes coordenados tenga área mínima.

34. Calcula un punto (u, v) $(u > 0, v > 0)$ de la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ tal que la tangente a la elipse en dicho punto determine con los ejes:

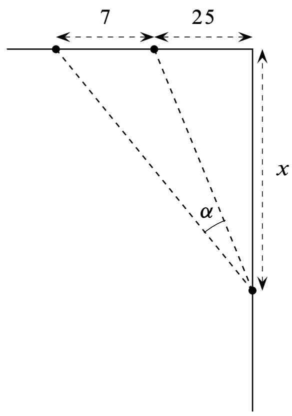
    a) Un triángulo de área mínima.

    b) Un segmento de longitud mínima.

35. La figura representa un espejo rectangular en el que se ha partido una esquina. Las dimensiones del espejo son $\overline{AB} = 3$, $\overline{AC} = 5$ y las de la esquina rota son las que se indican en la figura donde se supone que a es un valor conocido. Se pide calcular un punto P sobre la línea de corte de forma que el espejo de vértices A, X, P, Y tenga área máxima. ¿Para qué valor de a se verifica que el espejo de mayor área es un cuadrado?



36. Un futbolista avanza con el balón hacia la portería contraria por el borde del campo. ¿A qué distancia, x, de la línea de meta debe tirar a puerta para que el ángulo de tiro, α, sea máximo?



Extremos absolutos en intervalos cerrados y acotados

Consideraremos ahora el problema de hallar el máximo o mínimo absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$. Para ello puede seguirse el siguiente procedimiento:

***Paso 1**. Hallar todos los puntos x de $[a,b]$ que o bien son puntos críticos de f o son puntos en los que f no es derivable.*
***Paso 2**. Calcular el valor de f en cada uno de los puntos obtenidos en el Paso 1 y también en a y en b.*
***Paso 3**. Comparar los valores obtenidos en el Paso 2. El mayor de todos ello será el máximo absoluto de f en $[a,b]$ y el menor será el mínimo absoluto de f en $[a,b]$.*

37. Calcula los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

    a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$.

    b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en el intervalo $[-1, 2]$.

    c) $f(x) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 x + \cos x) + 2\operatorname{sen} x - x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

    d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(5-2x)$ en el intervalo $[-1, 3]$.

    e) $f(x) = -x^3 + 12x + 5$ en el intervalo $[-3, 3]$.

38. Para cada número real t sea $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + t^2 x$. Calcula, para cada valor de $t \in [-1, 1]$, el mínimo valor de $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

Cálculo de límites

Algunos consejos para calcular límites.

- Antes de empezar a calcular un límite funcional, simplifica todo lo que puedas la función y no escribas el símbolo "lím" hasta que no tengas una idea clara de cómo vas a hacer los cálculos.

- Trata de reducir el límite a otros bien conocidos. Para hacer eso debes recordar algunos límites que se repiten con frecuencia.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{6} \quad \lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \frac{1}{3}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{x - \log(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

- Usa las equivalencias asintóticas para sustituir en un **producto** o en un **cociente** de funciones, una de ellas por otra asintóticamente equivalente. Los límites anteriores proporcionan las equivalencias asintóticas más útiles. ¡Ojo! En una suma no puedes, en general, hacer eso.

- Cada vez que apliques las reglas de L'Hôpital comprueba que puedes hacerlo, es decir que se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Cada vez que derives al aplicar dichas reglas debes simplificar la expresión obtenida antes de volver a derivar.

- En general, no descompongas un límite como suma o producto de otros dos, pero si quieres hacerlo tienes que asegurarte de que dichos límites existen.

- Debes saber usar el criterio de equivalencia logarítmica que resuelve con frecuencia indeterminaciones del tipo 1^∞ y 0∞.

39. Calcula los límites siguientes.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi-2x)^2} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)}{x\operatorname{sen} x} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}\right)^{1/x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen} x-\operatorname{sen} x}{x(1-\cos x)} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\operatorname{sen} x-3x\cos x}{x^3}\right)^{1/x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2}\right) \qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{(\log(1+x))^2} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\log(1+\operatorname{sen} 2x)\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{sen}^3 x)}{(e^x-1)(1-\cos^2(\operatorname{tg}^2 x))} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{x-\pi/4}}$$

40. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones.

a) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{1/(x^2-1)}$, $f(1)=\sqrt{e}$.

b) $f:]-1/2,+\infty[\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+e^x)^{1/x}$, $f(0)=e^2$.

c) $f:]-\pi/2,\pi/2[\to\mathbb{R}$ $f(x)=\left(\dfrac{2-2\cos x}{x^2}\right)^{1/x}$, $f(0)=1$.